



61 Olimpíada Matemàtica Espanyola

Fase Local - Illes Balears

Solucions a càrrec de *Joan Carles Pons* i *Miquel Amengual Covas*



Problema 1. Proveu que en tot conjunt de quatre nombres enters senars i consecutius, la suma de dos d'ells és divisible per 10.

Solució.

Sigui n un nombre enter.

Les sumes obtingudes al sumar dos a dos els elements del conjunt de nombres senars i consecutius

$$\{2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7\}$$

són totes elles divisibles per 2.

Atès que aquestes sumes són:

$$4n + 4, \quad 4n + 6, \quad 4n + 8, \quad 4n + 10, \quad 4n + 12 \quad (1)$$

i que tot nombre enter és d'una de les formes $\dot{5}$, $\dot{5} \pm 1$, $\dot{5} \pm 2$, es té:

$$\begin{array}{llll} \text{si } n = \dot{5} - 1, & 4n + 4 & = & 4(n + 1) = \dot{5}, \\ \text{si } n = \dot{5} + 1, & 4n + 6 & = & 4(n - 1) + 10 = \dot{5}, \\ \text{si } n = \dot{5} - 2, & 4n + 8 & = & 4(n + 2) = \dot{5}, \\ \text{si } n = \dot{5}, & 4n + 10 & = & \dot{5}, \\ \text{si } n = \dot{5} + 2, & 4n + 12 & = & 4(n + 3) = \dot{5}. \end{array}$$

Així, doncs, alguna de les sumes (1) és múltiple de 5. Essent també múltiple de 2, pel que hem vist, serà múltiple del mínim comú múltiple de 2 i 5, és a dir, múltiple de 10.

Problema 2. La successió a_n està definida per $a_1 = 1$, $a_{2k} = 1 + a_k$ i $a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}}$ per a tot enter $k \geq 1$. Proveu que tot nombre racional positiu apareix exactament una vegada en aquesta successió.

Solució.

Notem que $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i $a_3 = \frac{1}{2}$. A més, per a tot $k \geq 1$, $a_{2k} > 1$ i $a_{2k+1} \in (0, 1)$.

Indiquem per $\frac{n}{m}$ un nombre racional positiu amb n i m coprimers. Provem l'aparició del nombre en la successió per inducció sobre $s = n + m$. Volem veure que $\frac{n}{m} = a_{k'}$ per algun k' . Els casos base $s = 2$ i $s = 3$ ja s'han vist. Vegem ara el pas inductiu.

Si $\frac{n}{m} > 1$, llavors prenem $\frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}$. Observem que $n-m$ i m són coprimers i que la seva suma és $n < s$. Per tant, per hipòtesi d'inducció, $a_k = \frac{n-m}{m}$ per algun k . Finalment, $a_{2k} = 1 + a_k = \frac{n}{m}$.

Si $\frac{n}{m} < 1$, llavors $\frac{m}{n} > 1$. Procedint com abans, existeix k tal que $a_k = \frac{m}{n} - 1 = \frac{m-n}{n}$. Per tant, $a_{2k} = \frac{m}{n}$. Finalment, $a_{2k+1} = \frac{1}{a_{2k}} = \frac{n}{m}$.

Provem ara la unicitat. Volem veure que donat $\frac{n}{m}$ racional positiu, existeix un únic k tal que $a_k = \frac{n}{m}$. Suposem que hi ha i, j parell d'índexos tals que $\frac{n}{m} = a_i = a_j$ amb i mínim amb tal propietat.

Notem que i, j tenen ambdós la mateixa paritat: ambdós són parells si $\frac{n}{m} > 1$, i ambdós són senars si $\frac{n}{m} < 1$.

Si són ambdós parells, $i = 2i'$, $j = 2j'$, tenim que $a_i = a_{2i'} = 1 + a_{i'}$, i $a_j = a_{2j'} = 1 + a_{j'}$, d'on $a_{i'} = a_{j'}$, contradint la minimalitat de i .

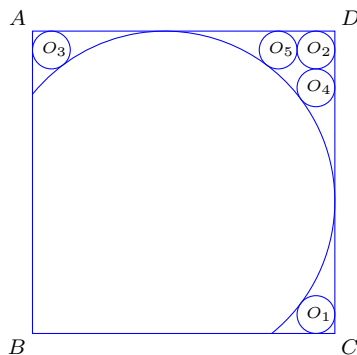
Si són ambdós senars amb $i = 1$, llavors $a_j = 1$ i això només pot passar si $j = 1$. Ara, si $i > 1$, $i = 2i' + 1$, $j = 2j' + 1$, $a_i = \frac{1}{a_{2i'}}$, $a_j = \frac{1}{a_{2j'}}$; d'on obtenim $a_{2i'} = a_{2j'}$, contradint, de nou, la minimalitat de i .

Problema 3. Cinc circumferències, que indicarem per O_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), del mateix radi r , són a l'interior d'un quadrat $ABCD$.

La circumferència O_1 és tangent a BC i CD ; O_2 és tangent a CD i DA ; O_3 és tangent a DA i AB ; O_4 és tangent a O_2 i CD ; O_5 és tangent a O_2 i DA .

Al seu torn, O_1 , O_3 , O_4 i O_5 són exteriors i tangents a una circumferència que toca els costats CD i DA del quadrat considerat.

Determineu el valor de r en funció de la longitud del costat del quadrat.



Nota. Per a la resolució del problema us pot ser d'utilitat (i serà valorat positivament en la qualificació del problema), que proveu el lema següent.

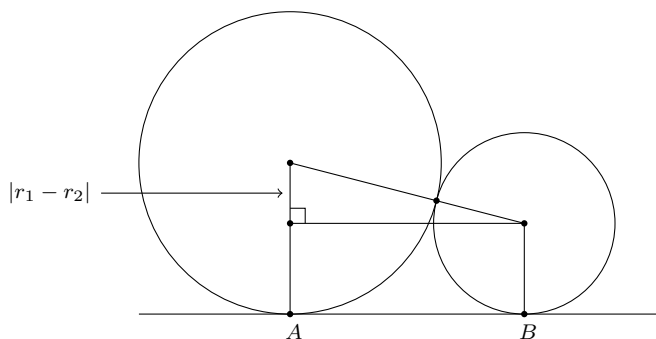
LEMA. Dues circumferències, de radis respectius r_1 , r_2 , exteriors i tangents, són tangents a una línia recta en els punts A i B ($A \neq B$). Aleshores,

$$AB^2 = 4r_1r_2.$$

Solució.

PROVA DEL LEMA. El teorema de Pitàgores i el fet que la línia de centres passa pel punt de contacte de les dues circumferències, donen immediatament:

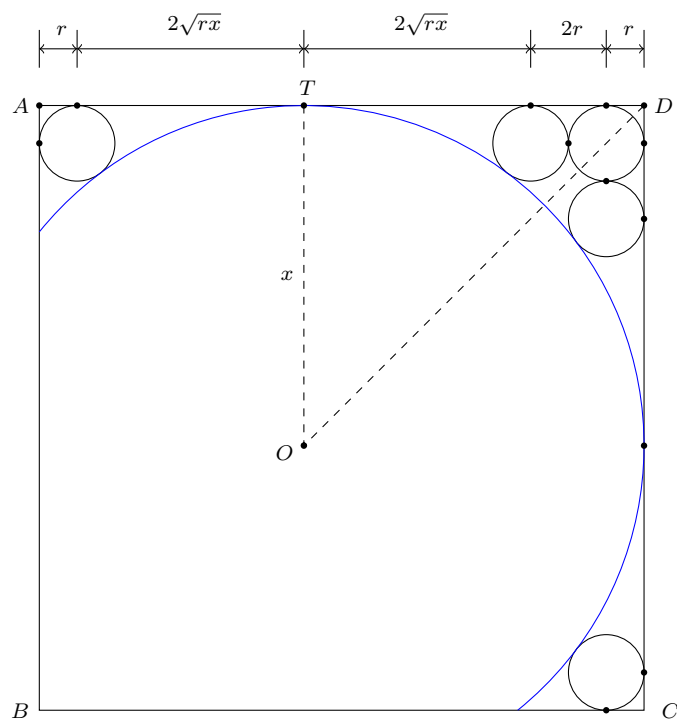
$$AB^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2.$$



1. Indiquem per O el centre de la circumferència gran i per x el seu radi. La longitud del costat del quadrat l'indicarem per a .

Es té:

$$r + 2\sqrt{rx} + 2\sqrt{rx} + 2r + r = a \quad \Leftrightarrow \quad 4\sqrt{rx} + 4r = a. \quad (2)$$



2. El triangle TOD , essent T un punt de tangència, és rectangle i isòsceles amb $OT = TD$.

És a dir:

$$x = 2\sqrt{rx} + 3r \Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3\sqrt{r})(\sqrt{x} + \sqrt{r}) = 0,$$

d'on deduïm que

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{r}.$$

Substituïm aquest valor de $\sqrt{x}$ a (1) i obtenim

$$12r + 4r = a$$

i

$$r = \frac{a}{16}.$$

Problema 4. Quants polígons regulars amb costats de longitud entera satisfan que la suma dels seus costats és igual a la suma dels seus angles (en graus)?

Solució.

Siguin $n \geq 3$ el nombre de costats que té el polígon i k la longitud dels seus costats.

Cercam el nombre de parelles (n, k) tals que $n \cdot k = 180(n - 2) = 180n - 360$.

D'aquí es dedueix que n ha de ser divisor de 360. Per tant, $k = 180 - \frac{360}{n}$. Com que $n \geq 3$, $\frac{360}{n} \leq 120$ i per tant $k = 180 - \frac{360}{n} \geq 60 > 0$. Llavors, per cada n , k és un enter positiu únic.

D'aquesta manera, com $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, deduïm que 360 té $(3 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 24$ divisors positius. Però hem de restar-ni 2 ja que 1 i 2 són divisors de 360 però són menors que 3.

D'aquí obtenim que hi ha exactament 22 polígons regulars que satisfan les propietats de l'enunciat.

Problema 5. Siguin a, b, c, x, y, z nombres reals estrictament positius.

(a) Proveu que $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

(b) Proveu que $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1$.

Nota. Una de les formes de resoldre l'apartat (b) és emprant l'apartat (a). Tot i així, ambdós apartats son independents.

Solució.

Provem (a). Per fer-ho, provem primer que, amb les condicions de l'enunciat,

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}.$$

Llevant denominadors, obtenim que

$$a^2y(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy,$$

i equivalentment

$$(ay - bx)^2 \geq 0,$$

resolent la prova.

Pel cas de l'enunciat, on cal provar que

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z},$$

sols cal aplicar aquest resultat previ dos cops consecutivament:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}.$$

Provem (b). Notem que (com $a, b, c > 0$) podem escriure

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} = \frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)}.$$

Ara, emprant l'apartat (a), tenim

$$\frac{a^2}{a(b+2c)} + \frac{b^2}{b(c+2a)} + \frac{c^2}{c(a+2b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}.$$

Sols manca provar que

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1.$$

Vegem que aquesta desigualtat és equivalent a veure que

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$$

que és clarament certa.

Així doncs,

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq 1 \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0.$$

Problema 6. Trobeu totes les funcions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tals que $f(0) = 0$, i que per a tot $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ i per a tot $b \in \mathbb{Z}$ es té que

$$f(f(a) + b) = \left\lfloor \frac{f(b)}{a} \right\rfloor.$$

Solució.

Com $f(0) = 0$, substituint amb $b = 0$, queda que per a tot $a \neq 0$, $f(f(a)) = 0$.

Ara veiem què passa si $f(x) \neq 0$ per alguna $x \neq 0$, substituïm a per $f(x)$, i $b = x$, queda que $f(f(f(x)) + x) = \left\lfloor \frac{f(x)}{f(x)} \right\rfloor$, és a dir que $f(x) = 1$. Per tant, $\forall x : (f(x) = 1) \vee (f(x) = 0)$.

Veiem que la única opció és $f \equiv 0$, això és perquè si $f(x) = 1$ per alguna x , llavors substituint (a, b) per $(-1, x)$ s'obté que $f(f(-1) + x) = \left\lfloor \frac{1}{-1} \right\rfloor = -1$, que contradiu el fet que -1 no té antiimatge. És fàcil comprovar que efectivament $f \equiv 0$ és solució.